中期报告（伍维晨部分）

2016年12月，Jorn Schrieber等在IEEE上发表论文DOTmark- A Benchmark for Discrete Optimal Transport，提出了对离散最优运输问题（Discrete Optimal Transport,DOT）的各类算法的评价标准。这篇论文中提到了四种求解离散最优运输问题的算法，是本组完成期末项目的重要参考。这部分将首先叙述论文的主体脉络，并提出本组将以此为参考进行何种工作。  
  
论文的第一部分介绍了问题的背景和研究的动机，第二部分明确了最优运输问题的定义。在一般意义下，最优运输问题定义为：



其中和分别是集合和上的测度。在实际应用中，往往将问题离散化，转化为以下的线性规划问题:



本文的第三部分提出了检验离散最优运输问题各类算法的标准，称为DOTmark，这是本文最主要的创建。作者运用了十种不同的图片——其中有的是以各种方式随机生成的，有的是经典图片，有的是几何图形，还有的是实际应用中的图像（显微镜下的线粒体图像）——两两配对，求解最优运输问题，并在不同的问题规模下对不同算法的运行时间进行考察。第四部分则介绍了作者考察的四种算法：

（1）Transportation Simplex（运输单纯形法）：该算法将DOT视为一个完全二部图匹配问题，并将任何一个可行匹配视为该二部图上的一棵生成树。算法从一个基础可行匹配开始，逐次加入变量，每次加入变量后都在此前的生成树上寻找由此生成的环；在该环上进行调整，尽可能减少匹配的代价，并将调整后变为0的变量从基础可行匹配中删去。如此循环，直至无法继续减少匹配的代价为止。

（2）Shortlist Method(短列表法)：该方法是运输单纯形法的变种，所不同的是加入了一个短列表和三个变量s,q,l:短列表用于限制搜索空间，s表示该短列表的长度，q和l用于控制寻找新基本可行解时搜寻的变量个数。当短列表中的所有变量都无法使运输代价进一步减小时，调用运输单纯形法将此时得到的局部最优解转化为全局最优解。

（3）Shielding Neighborhood Method, or Shortcut Method(捷径算法)：该算法的核心思想是解决一系列的稀疏最优运输问题。

（4）AHA Method(AHA算法)：该算法原本用于解决由连续测度向离散测度的最优运输问题，即所谓的半离散最优运输问题；为使该算法应用于完全离散的最优运输问题，本文作者对匹配中的第一幅图像做了连续化处理。该算法不一定是完全精确的。

接下来，本文作者应用DOTmark标准，对以上四种算法的性能做了检验，由于不涉及本组工作，此处对检验结果不再赘述。本组计划详细表述并实现Transportation Simplex算法，并将该算法的性能与其他算法进行比较。